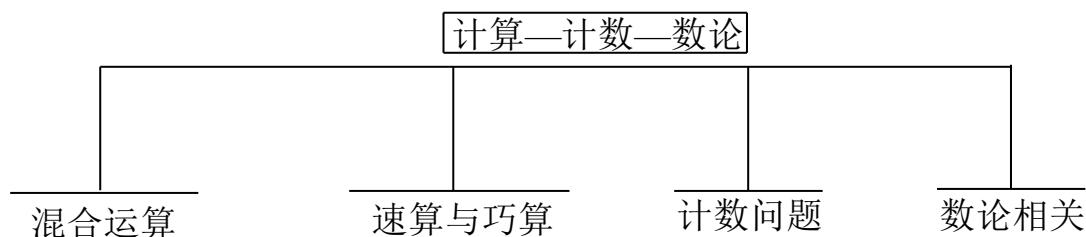


第1讲 计算、计数与数论

【知识框架】



模块1 混合运算

【知识梳理】

“混合运算”属于小升初考试中的必考模块,会涉及到如下内容:

- (1) 整数、分数和小数间的四则运算;
- (2) 运算顺序问题——同级运算从左至右依次完成运算;不同级别的运算,先乘除后加减;
- (3) 分数与小数之间的转化——一般的,解决乘除运算时,应将小数化成分数;解决加减运算时,可将分数化为小数;
- (4) 带分数与假分数之间的转化——一般的,解决乘除运算时,应将带分数化成假分数;解决加减运算时,直接用带分数运算.

再“冲刺”的过程中,建议大家勤练习、多查错.

【经典例题】

【例1】(1) $1\frac{3}{25} + [(1.5 + 2\frac{2}{3}) \div 3\frac{3}{4} - 0.4] \div 8\frac{8}{9}$;

(2) $2\frac{1}{4} \div \left[\left(2\frac{1}{3} - 1.2 \right) \times \frac{3}{4} + 0.05 \right]$.

【例 2】(1) $\frac{3.85 \times \left(5 - 2\frac{6}{7}\right) \div 1.25}{\left(\frac{3}{7} + 1\frac{1}{3} \div \frac{7}{9}\right) \times 1.1}$;

(2) $\left(5\frac{1}{3} + \frac{2\frac{1}{4} - 1\frac{1}{5}}{1\frac{1}{3} + 150\%}\right) \times \frac{1\frac{1}{3} + 150\%}{5\frac{1}{3} + \left(1\frac{1}{3} + 150\%\right) + 2\frac{1}{4} - 1\frac{1}{5}}$

模块 2 速算与巧算

【知识梳理】

(1) 加减运算技巧:

① 同分母结合;

② 凑整数.

(2) 乘除法的技巧

① 巧用乘法交换律和结合律.

② 互为倒数的因数结合相乘.

③ 便于约分的因数结合相乘.

④ 把乘积为整数或末尾产生 0 的因数结合相乘.

(3) 运算律的应用: ① $a(b+c) = ab+ac \Leftrightarrow ab+ac = a(b+c)$;

② $a+b+c = (a+c)+b$, $a \times b \times c = a \times (b \times c) = (a \times c) \times b$

(4)裂项相消:

常用分数裂项示例:

$$① \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1};$$

$$② \quad \frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \times \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right);$$

$$③ \quad \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right];$$

$$④ \quad \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3} \times \left[\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right];$$

常用整数裂项示例:

$$⑤ \quad n(n+1) = \frac{1}{3} \times [n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)];$$

$$⑥ \quad 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2);$$

$$⑦ \quad n(n+1)(n+2) \cdots (n+k) = \frac{1}{k+2} [n(n+1)(n+2) \cdots (n+k+1) - (n-1)n(n+1) \cdots (n+k)]$$

(5)换元法的应用: 当某一个数字(或算式)重复出现时, 就可以将这个数字(或算式)看做整体, 进行换元计算. 注意最终结果要换回.

【经典例题】

【例3】(1) $9+99+999$;

$$(2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10} \right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \cdots + \frac{2}{10} \right) + \cdots + \left(\frac{8}{9} + \frac{8}{10} \right) + \frac{9}{10};$$

$$(3) 0.035 \times 935 + 3 \times 0.035 + 0.07 \times 61 \times 0.5;$$

【例 4】(1) $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+4+\cdots+n}$;

(2) $2016 \times 20152016 - 2015 \times 20162016$

【例 5】 $5+8.02 \times 1.24 + 8.03 \times 1.23 + 8.04 \times 1.22 + 8.05 \times 1.21$ 的整数部分是_____.

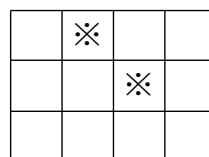
【例 6】(1) $(1 - \frac{1}{2016}) \times (1 - \frac{1}{2015}) \times \cdots \times (1 - \frac{1}{1001}) \times (1 - \frac{1}{1000})$

(2) $\frac{1+2}{2} \times \frac{1+2+3}{2+3} \times \frac{1+2+3+4}{2+3+4} \times \cdots \times \frac{1+2+\cdots+2016}{2+3+\cdots+2016}$

模块3 计数问题

【例6】有一列数，按照下列规律排列：1，2，2，3，3，3，4，4，4，4，5，5，5，5，5，6，6，6，6，6，7，……，这列数的第200个数是_____。

【例7】图中含有“※”的长方形总共有_____个。



模块4 数论相关

【经典例题】

【例8】小胡和小涂计算甲、乙两个两位数的乘积，小胡看错了甲数的个位数字，计算结果为1274；小涂看错了甲数的十位数字，计算结果为819。甲数是_____。

【例9】一棵树木，2009年树龄是59岁，如果将这棵树木的树龄作为分子，当年的公元纪元年号作为分母写成分数，如2005年这棵树木的树龄是55岁，写成分数是 $\frac{55}{2005}$ ，那么，这棵树木树龄从1岁至59岁，可以写出59个分数，其中最简分数有多少个？

【随堂测】

【练习 1】 $3 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \div \left[\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \times (1 - 0.5) - \frac{1}{6}\right]$

【练习 2】 计算 $37.5 \times 21.5 \times 0.112 + 35.5 \times 12.5 \times 0.112$ 的结果是_____.

【练习 3】 计算：

$$\left(2006 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2005}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2006}\right) - \left(2006 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2006}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2005}\right)$$

【练习 4】 对于三位数 $\overline{abc}$ 定义一种新运算 $\langle \overline{abc} \rangle$ ：求其个位、十位、百位数字之和与两两乘积之和以及三者乘积之和的总和。例如，

$$\langle 123 \rangle = 1 + 2 + 3 + 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 1 + 1 \times 2 \times 3 = 23。$$

(1) $\langle 125 \rangle =$ ____; $\langle 128 \rangle =$ ____, $\langle 135 \rangle =$ ____, $\langle 158 \rangle =$ ____;

(2) 在上述尝试过程中，丁丁发现了一些有趣的变化趋势。在个位数和百位数不变的情况下，随着十位数逐渐增大， $\langle n \rangle \div n$ 的商逐渐_____（填增大或减小）。除此之外，你是否还发现别的类似规律？

(3) 利用上面的规律，请你找到两个三位数，它们都能满足条件 $\langle n \rangle = n$ 。

【练习 5】用三根火柴可拼成一个小“ $\triangle$ ”，若用 108 根火柴拼成如图所示形状的大三角形，请你数一数共有多少个三角形？

